

惑星・衛星軌道のフラクタル構造と音楽の音程

Fractal structure and musical interval in the orbit of planets and satellites

【概要】 惑星・衛星の軌道半径に大雑把な自己相似性があることを示し、ケプラーの第3法則から公転の角周波数を音程として計算してみた SF ファンタジー作品。

1. 軌道半径

まず惑星の軌道半径の特徴を調べる。良く近似されると言われるティティウス・ボーデの法則 (Titius - Bode law) は、太陽から惑星までの距離 r を次のように表現している。

$$r = a + b \cdot c^n$$

太陽系の場合、 $a=0.4, b=0.3, c=2$

n は、水星が $-\infty$ 、金星が 0 、地球が $1 \dots$

これを元に、精度を下げ次のような大雑把に指数関数として近似する事を試みた。

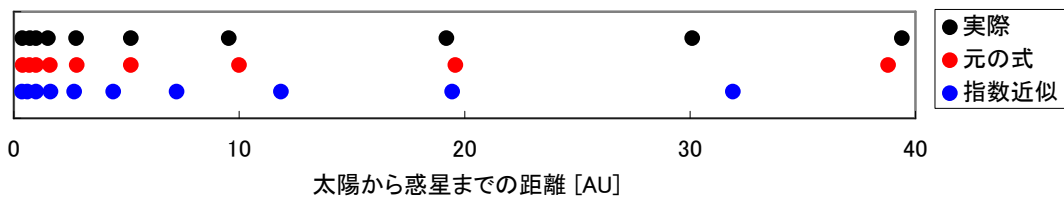
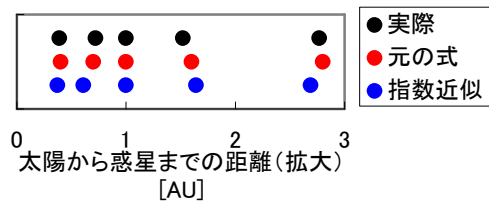
$$r = b \cdot c^n$$

この式の場合、太陽系の惑星も、木星の衛星も、 $c=1.64$ として近似した場合、以下のように大雑把な類似性が見られる。惑星と木星の衛星は、軌道半径が約 1,000 倍もスケールが違うにも関わらず、パラメータ c がほぼ同じである点に共通性がある。

1. 太陽系の惑星軌道半径

	実際	n	元の式	n	指数近似
水星	0.39	-999	0.4	-2	0.4
金星	0.72	0	0.7	-1	0.6
地球	1	1	1.0	0	1.0
火星	1.52	2	1.6	1	1.6
ケレス	2.77	3	2.8	2	2.7
木星	5.2	4	5.2	3	4.4
土星	9.54	5	10.0	4	7.2
天王星	19.2	6	19.6	5	11.9
海王星	30.1	7	38.8	6	19.5
冥王星	39.4	8	77.2	7	31.9

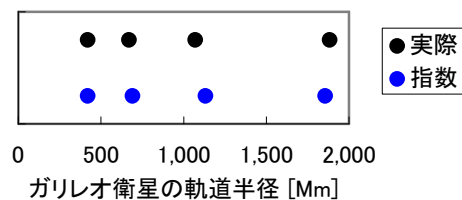
単位: AU



2. 木星を回る大きな衛星の軌道半径

	実際	n	指数
イオ	421	0	421
エウロパ	670	1	690
ガニメデ	1070	2	1,132
カリスト	1883	3	1,857

単位: Mm (1,000km)



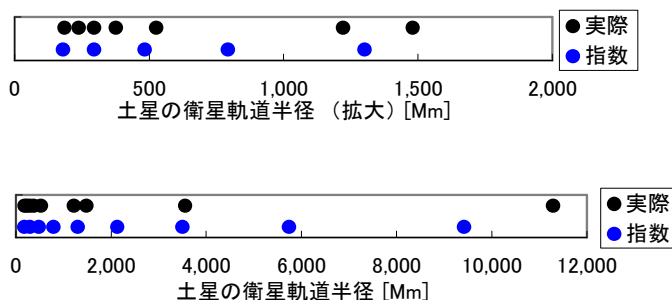
注: ケレスは小惑星最大の準惑星。冥王星は惑星から準惑星に降格された。

土星の衛星についても同じcの値で指数近似と比較してみた。土星は環や逆行衛星などが多数あり、複雑で規則性が少なく、かなり不一致な結果となった。木星でも小さい衛星は同様である。

3. 土星を順方向に回る大きな衛星の軌道半径

	実際	n	指数
ミマス	185	0	180
エンケラドゥス	238	1	295
テイテイス	295	2	484
ディオネ	377	3	794
レア	527	4	1,302
タイタン	1222	5	2,135
ヒペリオン	1481	6	3,502
イアペトウス	3561	7	5,744
キビウク	11295	8	9,419

単位: Mm (1,000km)



惑星や衛星が出来上がるまで、個々の生い立ちや相互関係が関係するため、詳細について一般論は通用しない。大雑把に言えるのは、内側ほど衛星は密集しているという程度の事であった。

2. フラクタル性

図形の一部を拡大した場合、元の図形と似た（相似な）図形となる性質を自己相似性と言い、フラクタル性を持つ（数学的にはフラクタル次元などが厳密に検討されている）。上述の指数近似は拡大しても指数部は同じ形であるため自己相似性とフラクタル性を有している。従って似た形の軌道半径の比率が惑星だけでなく衛星にも大雑把に存在すると推察できる（彗星や黄道から外れた星、逆行衛星など例外も多い）。次に惑星の軌道半径から公転周期を計算する。

3. ケプラーの第3法則

まず準備をしておく。惑星に加わる重力加速度の式と遠心力による加速度の式を示す（a：加速度、G：重力定数、m：太陽の質量、r：惑星の軌道半径）。

$$a = G \frac{m}{r^2} \quad , \quad a = \omega^2 \times r$$

惑星の円運動では方向の違う両者が釣り合う条件となるので、次のようになる。

$$\omega^2 \cdot r^3 = Gm$$

以上でケプラーの第3法則を、円運動の場合について計算できた。公転角速度 ω は軌道半径の $3/2$ 乗に比例する事がわかる。

4. ケプラーの惑星音階と神秘

惑星や衛星の公転周期は、対数をとると大雑把に一定間隔に分布し、公転半径を近似するパラメータを $c=1.64$ とした場合、隣り合う内側の惑星の角周波数はその $3/2$ 乗=2.10倍（1オクターブと半音）程度となる（軌道共鳴によって1オクターブへ近づく現象もある）。これは惑星や衛星に現れる平均的な数値として非常に興味のある結果ではある。しかしケプラーは、これとは別の惑星音階を考案した。

ケプラーは惑星の近日点と遠日点での角速度を、各惑星個別に音階へあてはめ、惑星音階を考案した。それだけではなく戦争や災い等の事件とも関連付けて考えた。占星術が科学から分離されたのは後の事である。当時は天体の運行にロマンと神秘を感じたのであろう。

しかし研究が進むほど、謎のレベルは高まり、現代におけるロマンと神秘はケプラーの時代よりも遥かに深遠なものとなってきている。